

RESISTENCIA DE MATERIALES (GITI).Curso 2012-13.
EXAMEN FINAL. PROBLEMA

La barra de diámetro Φ de la figura está constituida por un material de módulo G y se sustenta de dos formas:

- A) Con un empotramiento en el extremo izquierdo (caso isostático)
- B) Con un empotramiento en cada extremo (caso hiperestático)

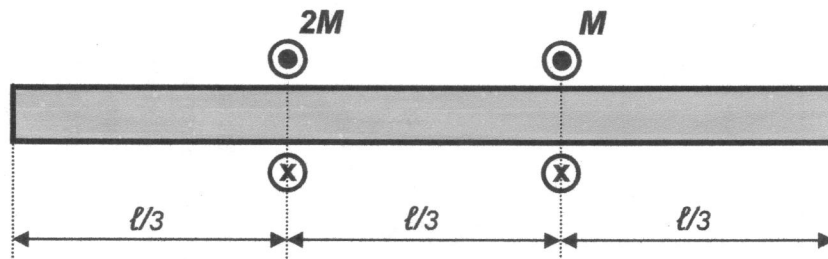
Se pide:

1º) Diagrama de momentos torsores para ambos casos, dibujándolos superpuestos y a la misma escala

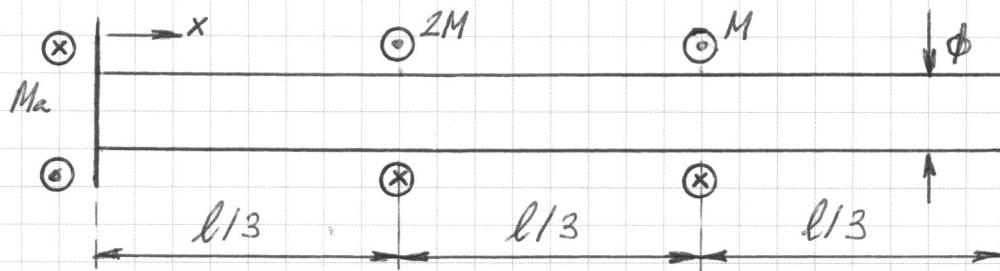
2º) Diagrama de ángulos de torsión, $\theta(x)$, para ambos casos, dibujándolos superpuestos y a la misma escala

3º) Hallar la energía elástica en ambos casos, expresándola en *Julios* para los siguientes valores numéricos:

$M=5\text{kN}\cdot\text{m}$; $l=60\text{cm}$; $\Phi=100\text{mm}$; $G=80.000\text{MPa}$



Caso A:



$$M_a = 2M + M = 3M$$

$$I_0 = \frac{\pi (\phi/2)^4}{2} = \frac{\pi \phi^4}{32}$$

$$0 \leq x \leq l/3$$

$$M(x) = 3M$$

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{GI_0} dx = \int \frac{3M}{GI_0} dx = \frac{3M}{GI_0} x \quad ; \quad \theta(0) = 0 \quad \theta(l/3) = \frac{Ml}{GI_0}$$

$$l/3 \leq x \leq 2l/3$$

$$M(x) = 3M - 2M = M$$

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{GI_0} dx = \int_0^{l/3} \frac{3M}{GI_0} dx + \int_{l/3}^x \frac{M}{GI_0} dx \quad ; \quad \theta(2l/3) = \frac{4Ml}{3GI_0}$$

$$2l/3 \leq x \leq l$$

$$M(x) = 3M - 2M - M = 0$$

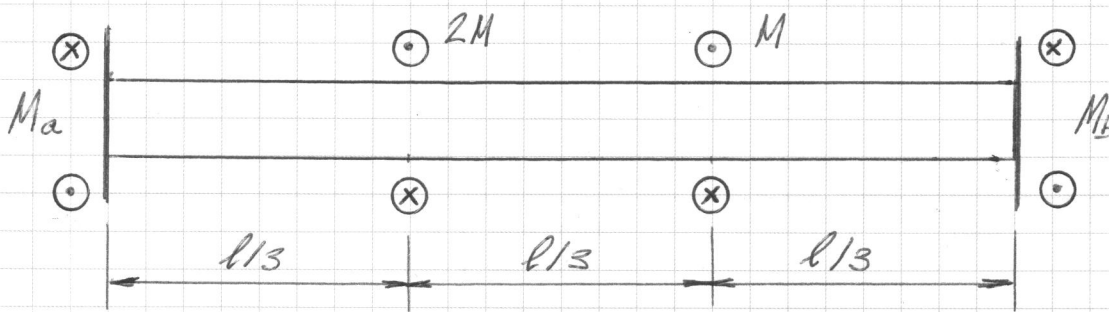
$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{GI_0} dx = \int_0^{l/3} \frac{3M}{GI_0} dx + \int_{l/3}^{2l/3} \frac{M}{GI_0} dx + \int_{2l/3}^l \frac{0}{GI_0} dx \quad ; \quad \theta(2l/3) = \theta(l)$$

Energía elástica:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{GI_0} dx = \frac{1}{2GI_0} \left[9M^2 \frac{l}{3} + M^2 \frac{l}{3} \right] = \frac{10M^2 l}{6GI_0} =$$

$$= \frac{5}{3} \frac{5^2 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \cdot 60 \text{ cm}^2}{80.000 \text{ MPa} \cdot \pi \cdot 100^4 \text{ mm}^4 / 32} = 31,83 \text{ J}$$

Caso B:



$$M_a + M_b = 3M$$

Problema hiperestático de grado 1.

Compatibilidad geométrica:

$$\theta(l) - \theta(0) = \int_0^l \frac{M(x)}{GI_0} dx = \frac{1}{GI_0} \left[M_a \frac{l}{3} + (M_a - 2M) \frac{l}{3} + (M_a - 3M) \frac{l}{3} \right] = 0$$

de donde: $M_a = 5M/3$

$$0 \leq x \leq l/3 \quad M(x) = M_a = 5M/3$$

$$l/3 \leq x \leq 2l/3 \quad M(x) = M_a - 2M = 5M/3 - 2M = -M/3$$

$$2l/3 \leq x \leq l \quad M(x) = M_a - 2M - M = 5M/3 - 2M - M = -4M/3$$

$$\theta(l/3) - \theta(0) = \int_0^{l/3} \frac{5M/3}{6I_0} dx = \frac{5Ml}{96I_0}$$

$$\theta(2l/3) - \theta(0) = \int_0^{l/3} \frac{5M/3}{6I_0} dx + \int_{l/3}^{2l/3} \frac{-M/3}{6I_0} dx = \frac{4Ml}{96I_0}$$

Energía elástica:
$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{6I_0} dx = \frac{1}{26I_0} \left[\left(\frac{5M}{3}\right)^2 \frac{l}{3} + \left(\frac{M}{3}\right)^2 \frac{l}{3} + \left(\frac{4M}{3}\right)^2 \frac{l}{3} \right] =$$

$$= \frac{4M^2 l}{96I_0} = \frac{4}{9} \frac{5^2 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \cdot 60 \text{ cm}}{80.000 \text{ MPa} \cdot 17100^4 \text{ mm}^4 / 32} = 14,85 \text{ J.}$$

