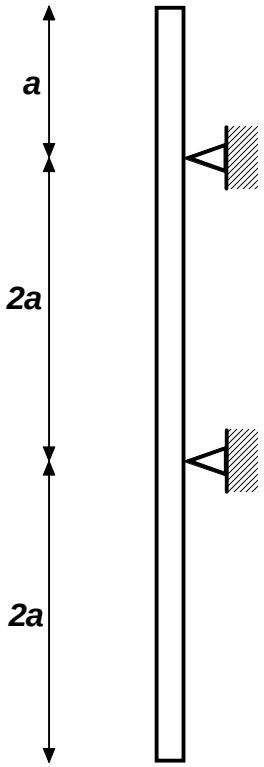
INDUSTRIALES
ETSII | UPM

RESISTENCIA DE MATERIALES (GITI) **CURSO 2013-14**
2ª PRUEBA DE EVALUACIÓN CONTINUA **25-11-2013**

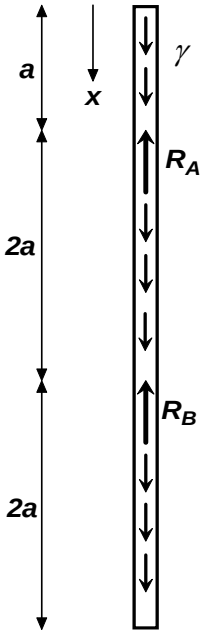
PROBLEMAS (2 horas)

1.- (2 puntos) Para la barra de la figura, de sección constante A y peso específico γ, halle el diagrama de esfuerzos normales.



RESOLUCIÓN

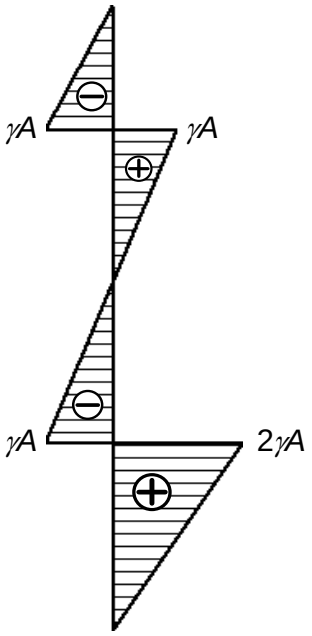
Se trata de un problema hiperestático externo de primer grado, puesto que hay dos incógnitas (R_A y R_B), y solo una ecuación de equilibrio $R_A + R_B - 5\gamma Aa = 0$. Es necesaria una ecuación adicional que puede obtenerse de la condición de alargamiento nulo entre las secciones A y B, que para la referencia de la figura es $\int_a^{3a} \frac{N(x)}{EA} dx = 0$, que como EA es constante se reduce a $\int_a^{3a} N(x) dx = 0$.



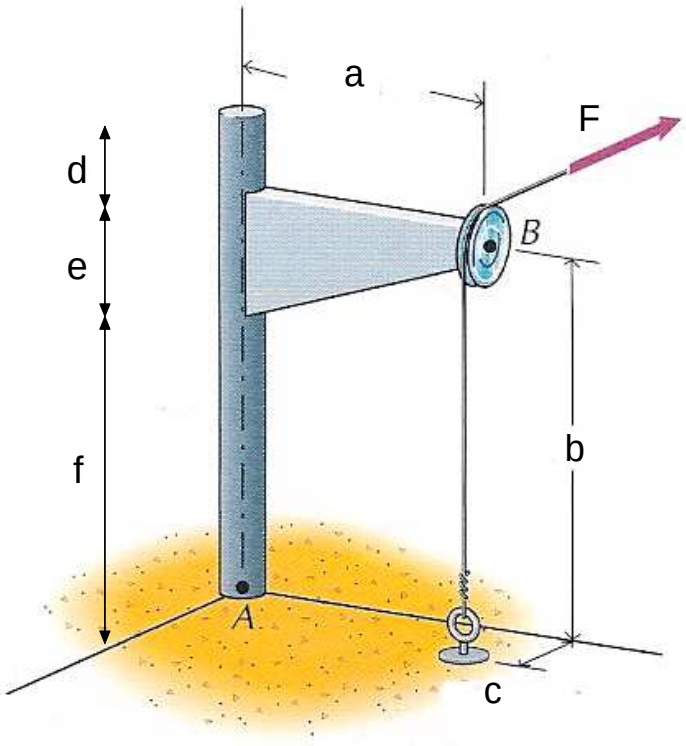
Al dar un corte por una sección genérica (uno por cada tramo característico), y eliminar la parte superior de la barra, las leyes de esfuerzo normal son, en cada tramo:

$$0 \le x < a \qquad N = -\gamma A x$$
$$a \le x < 3a \qquad N = -\gamma A x + R_A$$
$$3a \le x < 5a \qquad N = -\gamma A x + R_A + R_B$$

Por lo tanto, la condición queda como $\int_a^{3a} \left(-\gamma A x + R_A\right) dx = 0$, es decir $-\frac{\gamma A}{2} x^2 \Big|_a^{3a} + R_A x \Big|_a^{3a} = 0$, de donde $-\frac{\gamma A}{2}\left(9a^2 - a^2\right) + R_A(3a - a) = 0$ y por tanto $R_A = 2\gamma A$. De la ecuación de equilibrio $R_B = 3\gamma A$ y el diagrama resultante es el siguiente.

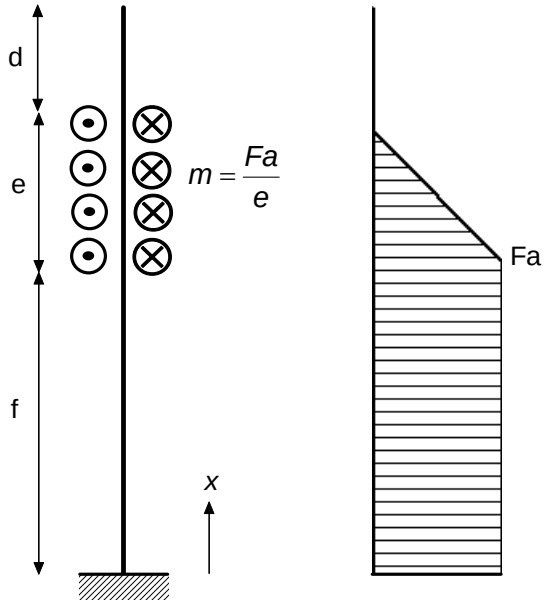


2.- (2 puntos) En el mástil de la figura (Datos: I_0, G), la cartela transmite uniformemente los esfuerzos al mismo a lo largo de la unión entre ambos. Halle el diagrama de momentos torsores en el mástil y el giro de torsión de su extremo superior.



RESOLUCIÓN

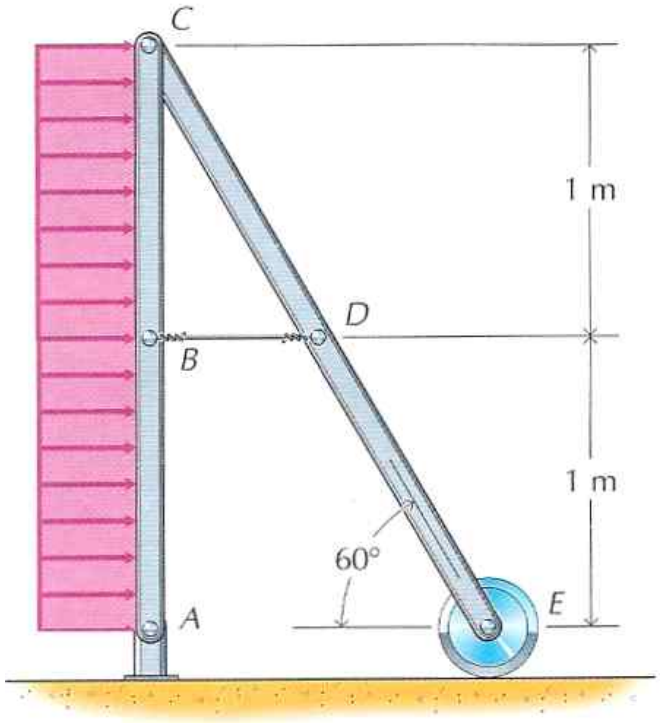
Según el enunciado, el momento torsor *Fa* se transmite al mástil como un momento uniformemente distribuido a lo largo de la longitud *e* de contacto entre la cartela y el mástil, lo que da lugar a un diagrama lineal entre f y f + e y constante entre 0 y f.



El giro del extremo superior equivale al giro relativo entre las dos secciones extremas, ya que el origen es un empotramiento $\theta(d+e+f)-\theta(0)=\int_0^{d+e+f}\frac{M_T(x)}{GI_0}dx$. Como la rigidez torsional es constante, entonces, se reduce a $\theta(d+e+f)=\frac{1}{GI_0}\int_0^{d+e+f}M_T(x)dx$, es decir, el área del diagrama dividido por la rigidez.

El área se puede calcular como la suma de las áreas del rectángulo y el triángulo, por lo que $\theta(d+e+f)=\frac{1}{GI_0}\left(Fa\cdot f+\frac{1}{2}Fa\cdot e\right)$. Agrupando: $\theta(d+e+f)=\frac{Fa}{GI_0}\left(f+\frac{e}{2}\right)$.

3.- (4 puntos) En la estructura de la figura, BD es un cable y las uniones entre las barras en A, C y E son pasadores cilíndricos. El rozamiento se considera nulo en cualquiera de los contactos. La carga uniforme es $q = 10\frac{kN}{m}$.



Se pide:

1.- Reacciones en A y E (0,5 puntos)

Para la barra **ABC**:

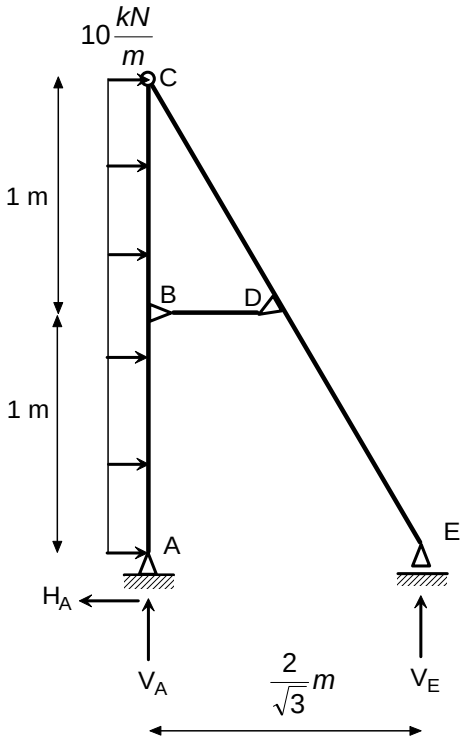
2.- Diagramas acotados de esfuerzo cortante (kN) y momento flector (kN·m), indicando claramente el criterio de signos seguido (2 puntos)

3.- Perfil IPE mínimo necesario para que no se supere el límite elástico (acero S275), considerando exclusivamente las tensiones debidas al momento flector (1 punto)

4.- Tensión cortante máxima (0,5 puntos)

RESOLUCIÓN

1.- El esquema de la estructura es el siguiente.



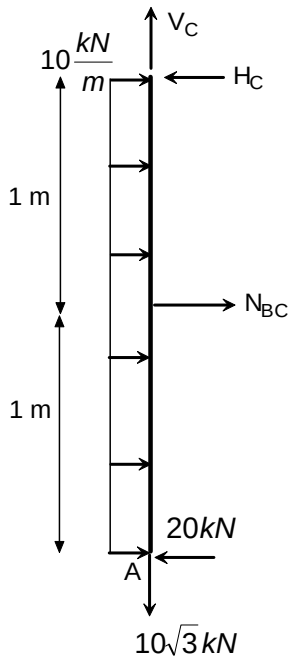
Planteando equilibrio de acciones exteriores:

$$\sum F_H = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = 20\,kN$$

$$\sum F_V = 0 \quad \rightarrow \quad V_A + V_E = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = -V_E$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \quad \rightarrow \quad 20 - V_E \frac{2}{\sqrt{3}} = 0 \quad \rightarrow \quad V_E = 10\sqrt{3}\,kN$$

2.- Aislando la barra ABC:



Del equilibrio de momentos en C se obtiene N_{BC}:

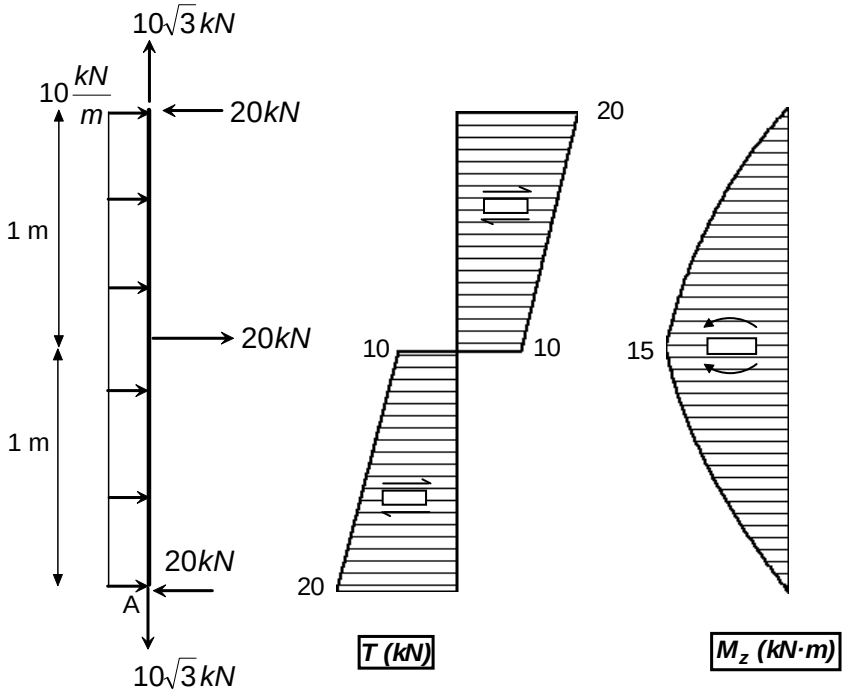
$$\sum M_{(C)} = 0 \quad \rightarrow \quad 20 \cdot 2 - 20 \cdot 1 - N_{BC} \cdot 1 = 0 \quad \rightarrow \quad N_{BC} = 20\,kN$$

La expresión anterior coincide con la expresión de momento flector nulo en C.

Las otras dos reacciones no son imprescindibles, aunque su obtención es inmediata, por equilibrio de fuerzas: $H_c = 20\,kN \quad V_C = 10\sqrt{3}\,kN$. *También se obtienen por equilibrio de fuerzas al aislar la barra DCE.*

Puede observarse que la suma vectorial de H_c *y* V_C *no lleva la dirección de la barra DCE. Esto sólo sucede cuando DCE, además de ser biarticulada, no tiene cargas perpendiculares a su directriz.*

Los diagramas resultan:



3.- Para el dimensionamiento a flexión se impone que $|\sigma_x|_{máx} = \dfrac{|M_z|_{máx}}{W_z} < \sigma_e$. Se toma, en primer lugar, el límite elástico nominal del acero S275, esto es, 275 MPa.

De aquí, se tiene $W_z > \dfrac{1{,}5 \cdot 10^6\, N \cdot mm}{275\,\dfrac{N}{mm^2}} = 54545\,mm^3 \equiv 54{,}5\,cm^3$. El primer perfil que cumple es el IPE 140.

Como el espesor de sus alas (zona de la sección donde se da la tensión máxima). es inferior a 16 mm, se acepta la elección. *En caso contrario, se comprobaría el perfil elegido para un límite elástico reducido en función del espesor.*

4.- La tensión cortante máxima se da en el centro de gravedad del perfil, punto en el cual es máximo el momento estático respecto al eje fuerte del perfil y mínima la anchura.

En tal caso $\tau_{máx} = \frac{|T|_{máx} \cdot S_X}{e \cdot I_X}$, siendo S_x el momento estático de media sección e I_X el momento de inercia de la sección, ambos respecto al eje fuerte, y e el espesor del alma.

Sustituyendo valores:

$$\tau_{máx} = \frac{2 \cdot 10^4 N \cdot 44{,}2 \cdot 10^3 mm^3}{4{,}7 mm \cdot 541 \cdot 10^4 mm^4} = 35\ MPa$$