

SOLUCIÓN

1) Un eje de aluminio de 80 mm de diámetro se introduce concéntricamente dentro de un tubo de acero. Determinar el diámetro interior del tubo de manera que no exista presión alguna de contacto entre eje y tubo cuando sobre el eje de aluminio actúe una fuerza axial de compresión de 400 kN.

Datos para el aluminio: $E = 70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ $\mu = 1/3$ 3-7-87 (2 puntos)

Tensión sobre el eje de aluminio: $\sigma = -\frac{400 \text{ kN}}{\pi \phi^2/4}$

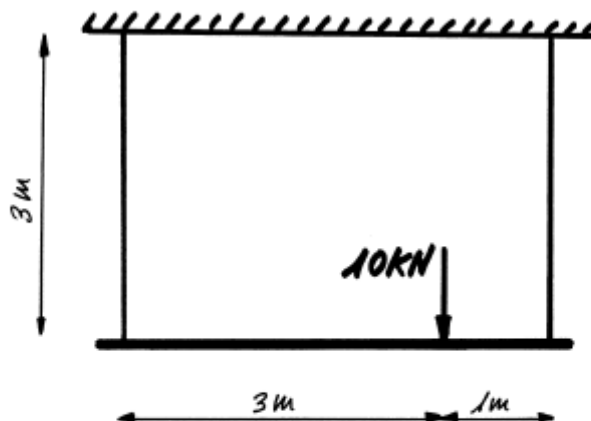
Deformación transversal: $\frac{\Delta \phi}{\phi} = -\mu \frac{\sigma}{E}$

Para que no haya presión de contacto entre el eje y el tubo, el diámetro final del eje, ϕ_f , debe ser igual al diámetro interior del tubo, ϕ_i , luego, siendo $\Delta \phi = \phi_f - \phi$, se despeja:

$$\phi_f = \phi_i = \phi \left(1 - \mu \frac{\sigma}{E} \right) = 80 \text{ mm} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{400 \text{ kN} \cdot 4}{\pi \cdot 80^2 \text{ mm}^2 \cdot 70 \text{ GPa}} \right) = 80,03 \text{ mm}.$$

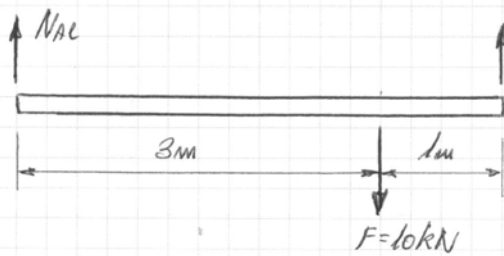
2) Una viga indeformable de longitud 4 m, de peso despreciable, está suspendida por dos hilos verticales de 3 m de longitud. La viga está cargada con un peso, situado a 3 m del hilo de la izquierda. Sabiendo que el hilo de la izquierda es de aluminio de 25 mm² de sección y que el de la derecha es de acero, de 64 mm² de sección, se pide:

- Determinar la tensión en cada uno de los hilos.
- Calcular el alargamiento de cada hilo.



Datos: $E_{\text{acero}} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ $E_{\text{aluminio}} = 0,6 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

(2 puntos)



$$E_{Ae} = 0.6 \cdot 10^5 \text{ MPa} ; A_{Ae} = 25 \text{ mm}^2$$

$$E_{Ac} = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa} ; A_{Ac} = 64 \text{ mm}^2$$

Equilibrio:

$$F = N_{Ae} + N_{Ac} \quad \left. \begin{array}{l} N_{Ac} = 3F/4 \\ N_{Ac} \cdot 4 = F \cdot 3 \end{array} \right\} N_{Ae} = F/4$$

$$N_{Ac} \cdot 4 = F \cdot 3 \quad N_{Ae} = F/4$$

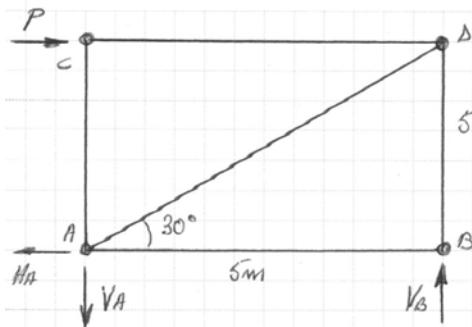
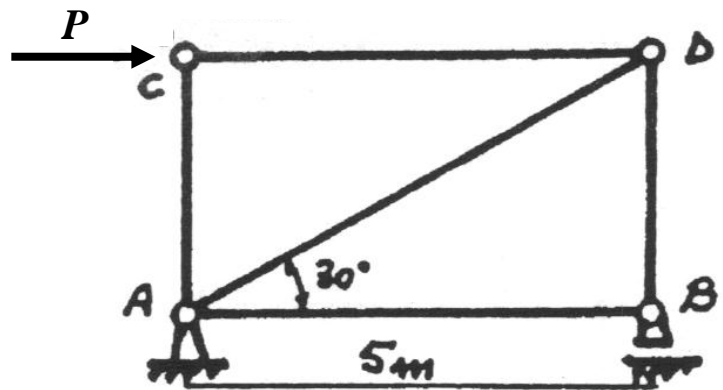
$$a) \quad \sigma_{Ae} = \frac{N_{Ae}}{A_{Ae}} = \frac{10 \text{ kN}/4}{25 \text{ mm}^2} = 100 \text{ MPa} ; \quad \sigma_{Ac} = \frac{N_{Ac}}{A_{Ac}} = \frac{3 \cdot 10 \text{ kN}/4}{64 \text{ mm}^2} = 117.2 \text{ MPa}$$

$$b) \quad \Delta l_{Ae} = \frac{N_{Ae} \cdot l}{E_{Ae} \cdot A_{Ae}} = \frac{100 \text{ MPa} \cdot 3 \text{ m}}{0.6 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 5 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{Ac} = \frac{N_{Ac} \cdot l}{E_{Ac} \cdot A_{Ac}} = \frac{117.2 \text{ MPa} \cdot 3 \text{ m}}{2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 1.67 \text{ mm}$$

3) Para el sistema articulado de la figura se pide determinar en función de P los esfuerzos en todas las barras, indicando si son de tracción o de compresión

(2 puntos)



Equilibrio:

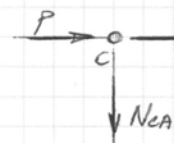
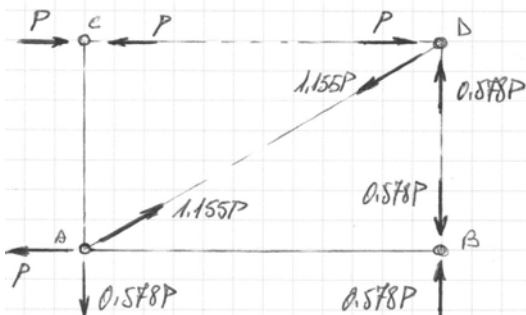
$$H_A = P$$

$$V_B \cdot 5 = P \cdot 2.89$$

$$V_A = V_B$$

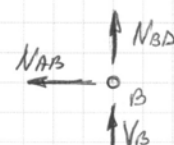
$$H_A = P$$

$$V_A = V_B = 0.578P$$



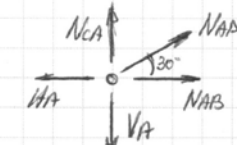
$$N_{CA} = 0$$

$$N_{CD} = -P$$



$$N_{AB} = 0$$

$$N_{BD} = -V_B = -0.578P$$



$$N_{CA} = N_{AB} = 0$$

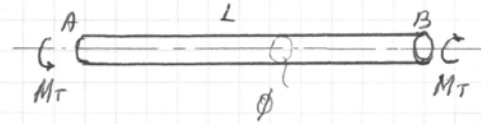
$$H_A = N_{AB} \cos 30 ; V_A = N_{AB} \sin 30$$

$$N_{AD} = 1.155P$$

4) Hallar la tensión máxima que se produce al girar relativamente un octavo de vuelta las secciones extremas de una barra de longitud $L=600\text{mm}$ y diámetro $\Phi=5\text{mm}$. Dato: $G=80.000\text{MPa}$

(3 puntos)

Un octavo de vuelta: $\theta_B - \theta_A = \frac{360^\circ}{8} = \frac{\pi}{4}$



$$\theta_B - \theta_A = \frac{M_T L}{G I_0} = \frac{\pi}{4}$$

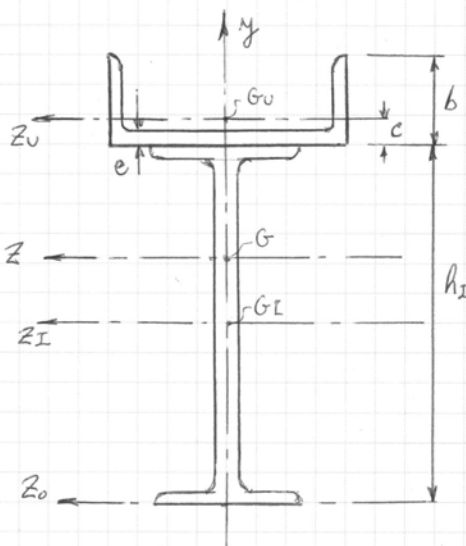
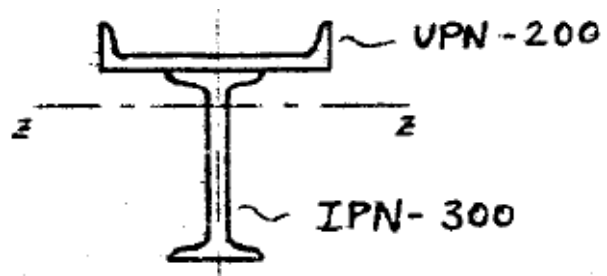
$$M_T = \frac{\pi}{4} \frac{G I_0}{L} = \frac{\pi^2 \cdot \Phi^4}{2^8} \frac{G}{L}$$

$$I_0 = \frac{\pi (\Phi/2)^4}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_0} \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi G}{4L} \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{8} \frac{80.000 \text{ MPa} \cdot 5 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} = 261.8 \text{ MPa}$$

5) Determinar, en cm^3 , el módulo resistente del perfil armado indicado en la figura

(3 puntos)



Tablas: UPN-200: $e = 8.5 \text{ mm}$, $b = 75 \text{ mm}$
 $c = 20.1 \text{ mm}$
 $I_z = 148 \text{ cm}^4$
 $A_0 = 31.2 \text{ cm}^2$

IPN-300: $I_z = 9800 \text{ cm}^4$, $A_f = 69.1 \text{ cm}^2$
 $h_z = 300 \text{ mm}$

Se calcula la posición de Z tomando momentos estáticos:

$$M_{Z_0} = (A_u + A_z) \cdot \bar{Z}\bar{Z}_0 = A_u(c + h_z) + A_z \cdot h_z/2$$

Sustituyendo valores y operando se obtiene: $\bar{Z}\bar{Z}_0 = 20.4 \text{ cm} = y_{\max}$

$$I_z = (I_{Z_0} + A_u \cdot \bar{Z}\bar{Z}_0^2) + (I_{Z_1} + A_f \cdot \bar{Z}\bar{Z}_1^2) =$$

$$= (148 + 31.2 \cdot 11.61^2) + (9800 + 69.1 \cdot 5.4^2) = 16303.2 \text{ cm}^4$$

$$\bar{Z}\bar{Z}_1 = c + (h_z - \bar{Z}\bar{Z}_0) = 20.1 + (30 - 20.4) = 11.61 \text{ cm}$$

$$\bar{Z}\bar{Z}_2 = \bar{Z}\bar{Z}_0 - h_z/2 = 20.4 - 30/2 = 5.4 \text{ cm}$$

$$W_z = I_z / y_{\max} = 16303.2 / 20.4 = 799.18 \text{ cm}^3$$

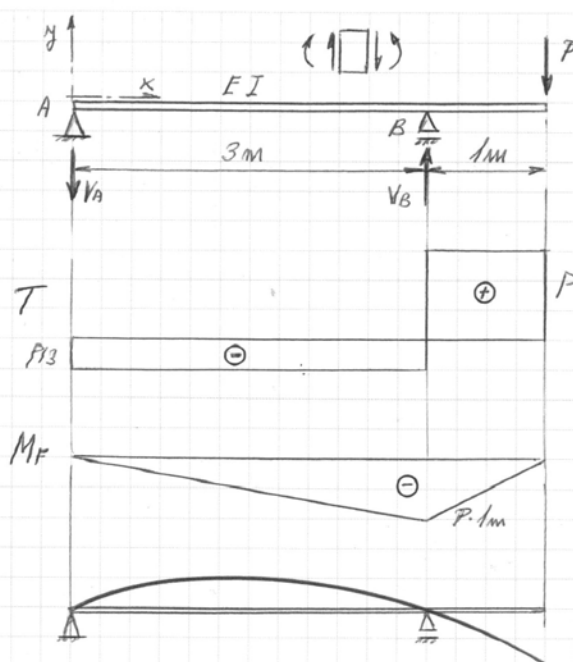
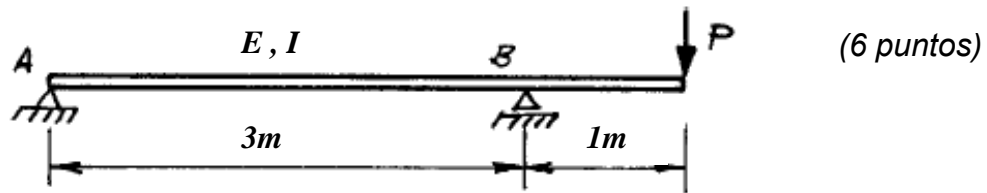
6) Para la viga de la figura, se pide:

6.a) Diagramas acotados de esfuerzos

6.b) Dibujar la elástica a estima

6.c) Escribir la ecuación universal y, a partir de la misma, hallar el giro de la sección **A** en función de E , I y P

6.d) Escribir la expresión del potencial interno y hallar, a partir de la misma, el desplazamiento del extremo libre en función de E , I y P



Equilibrio: $P + V_A = V_B$; $V_A \cdot 3 = P \cdot 1$ $\left\{ \begin{array}{l} V_A = \frac{P}{3} \\ V_B = \frac{4P}{3} \end{array} \right.$

Ecuación universal: $a = 3m$ $b = 1m$

$$EI y = EI y_0 + EI \theta_0 x - \frac{V_A}{6} x^3 + \frac{V_B}{6} (x-a)^3$$

$$EI y(a) = EI \theta_0 a - \frac{P}{18} a^3 = 0$$

$$\theta_0 = \frac{P a^2}{18 EI} = \frac{P}{2 EI}$$

Potencial interno:

$$0 < x < a : M(x) = -V_A x = -Px/3$$

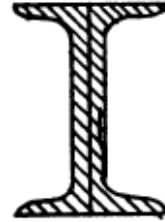
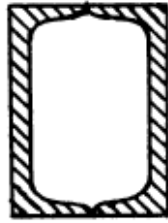
$$a \leq x \leq a+b : M(x) = -V_A x + V_B (x-a)^3 = -\frac{P}{3} x + \frac{4P}{3} (x-a)^3$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^3 \frac{P^2 x^2}{9} dx + \int_3^4 \frac{P^2}{9} (x + (x-3)^3)^2 dx \right]$$

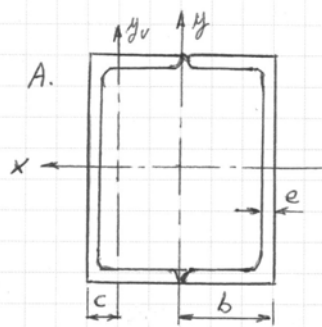
Desplazamiento del extremo libre por el Teorema de Castigliano:

$$\delta = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 \frac{P x^2}{9} dx + \int_3^4 \frac{P}{9} (x + (x-3)^3)^2 dx \right]$$

7) Un soporte biarticulado se quiere construir mediante dos UPN-180. Hallar la relación de cargas críticas de las dos configuraciones de la figura.



(2 puntos)

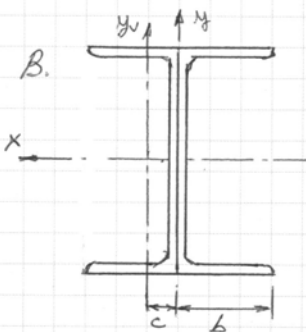


$$\text{UPN-180: } b=70\text{ mm}, e=8\text{ mm}, c=19,2\text{ mm} \\ I_y=114\text{ cm}^4, I_x=1350\text{ cm}^4, A=28\text{ cm}^2$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_p^2} \quad (I = I_{\min.}) \quad \frac{P_{crit A}}{P_{crit B}} = \frac{I_A}{I_B}$$

$$A: I_y = 2(I_{y0} + A_0 \cdot \overline{y_0 y}^2) = 2(I_{y0} + A_0 (b-c)^2) = 1673,2\text{ cm}^4$$

$$I_x = 2I_{x0} = 2700\text{ cm}^4$$



$$B: I_y = 2(I_{y0} + A_0 \cdot \overline{y_0 y}^2) = 2(I_{y0} + A_0 \cdot c^2) = 434,4\text{ cm}^4$$

$$I_x = 2I_{x0} = 2700\text{ cm}^4$$

$$\frac{P_{crit A}}{P_{crit B}} = \frac{I_{A \min}}{I_{B \min}} = \frac{1673,2}{434,4} = 3,85$$