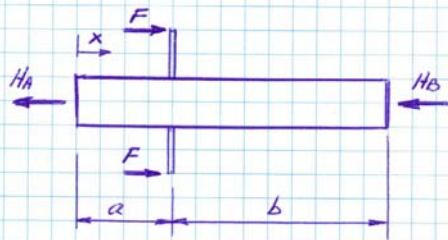
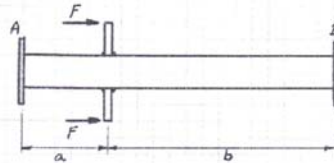


1º) Para la barra biempotrada de la figura se pide la expresión de las reacciones en A y B en función de  $F$ ,  $a$  y  $b$  (indique la dirección y el sentido de cada reacción)

(2 puntos)



- Equilibrio:  $H_A + H_B = 2F$

$$N(x) = \begin{cases} H_A & 0 \leq x \leq a \\ -H_B & a \leq x \leq a+b \end{cases}$$

- Compatibilidad geométrica:

$$\Delta l = \int \frac{N}{EA} dx = \frac{1}{EA} (H_A a - H_B b) = 0$$

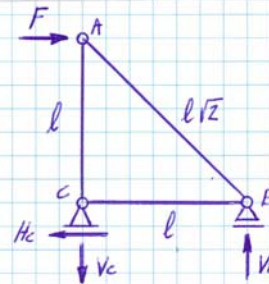
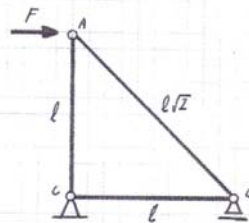
De las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad geométrica se deduce:

$$H_A = \frac{b}{a+b} 2F$$

$$H_B = \frac{a}{a+b} 2F$$

2º) Para el sistema articulado de barras de la figura se pide determinar en función  $F$  el esfuerzo normal en cada una de las tres barras, indicando si es de tracción o de compresión

(2 puntos)



Equilibrio de fuerzas exteriores:  $H_C = F$ ;  $V_C = V_B$

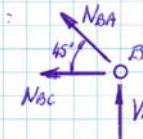
$$V_B l = F l$$

Equilibrio en el nudo A:

$$F + N_{AB} \sin 45^\circ = 0$$

$$N_{AC} + N_{AB} \cos 45^\circ = 0$$

Equilibrio en el nudo B:



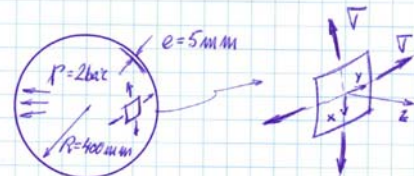
$$(N_{BA} = N_{AB}) \quad N_{BA} \cos 45^\circ + N_{BC} = 0$$

$$N_{BA} \sin 45^\circ + V_B = 0$$

De donde:  $N_{AB} = -F\sqrt{2}$ ;  $N_{AC} = F$ ;  $N_{BC} = F$

3º) Hallar el registro de una galga extensométrica adherida a la superficie exterior de un depósito esférico de radio medio  $R=400\text{mm}$  y espesor uniforme  $e=5\text{mm}$  sometido a una presión interna de 2 bar (1 bar = 0,1MPa)

Datos del material del depósito:  $E=70.000\text{MPa}$ ,  $\nu=0,33$  (2 puntos)



Tensión biaxial:  $\bar{\sigma} = \frac{pR}{2e}$

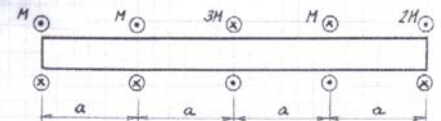
$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}; \quad \bar{\sigma}_z = 0$$

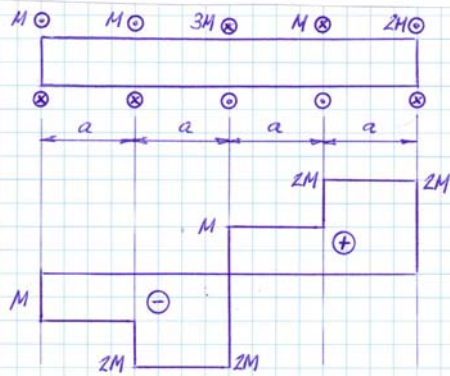
$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{1}{E} (\bar{\sigma} - \nu \bar{\sigma}) = \frac{\bar{\sigma}}{E} (1 - \nu)$$

La lectura de la galga es:  $\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\bar{\sigma}}{E} (1 - \nu) = \frac{pR}{2eE} (1 - \nu)$

$$= \frac{0,2\text{MPa} \cdot 400\text{mm}}{2 \cdot 5\text{mm} \cdot 70.000\text{MPa}} (1 - 0,33) = 1,91 \cdot 10^{-3}$$

4º) Un eje de diámetro  $d$  se encuentra sometido a los pares torsores indicados en la figura. Trazar el diagrama de momentos torsores y hallar la tensión tangencial máxima que se da en el eje en función de  $M$  y  $d$  (3 puntos)





$$\tau_{mx} = \frac{M_{Tmx}}{I_o} \frac{d}{z}$$

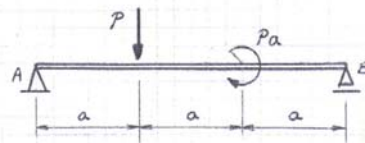
$$I_o = \frac{\pi}{2} \left( \frac{d}{2} \right)^4 = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$M_{Tmx} = 2M$$

$$\text{Luego: } \tau_{mx} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

5°) Trazar el diagrama de momentos flectores de la viga de la figura y determinar, en MPa, el valor de la tensión normal máxima (3 puntos)

Datos: Viga IPN-280,  $P=30\text{kN}$ ,  $a=1\text{m}$



Equilibrio:  $V_A + V_B = P$   
 $(M_A=0) Pa + Pa - V_B \cdot 3a = 0$

$$V_A = \frac{P}{3}$$

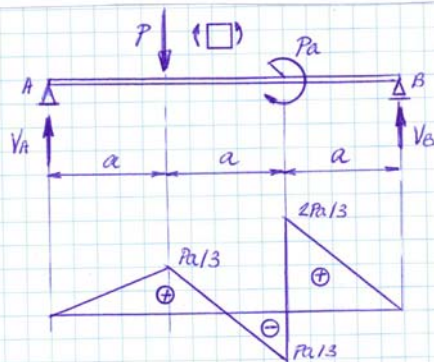
$$V_B = \frac{2P}{3}$$

$$\tau_{mx} = \frac{M_{Tmx}}{W_z}$$

$$M_{Tmx} = \frac{2Pa}{3}$$

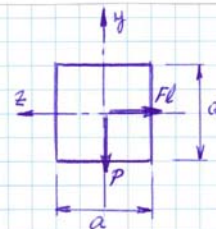
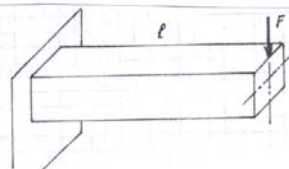
$$W_z = 542 \text{ cm}^3 \text{ (tablas IPN 280)}$$

$$\tau_{mx} = \frac{2Pa/3}{W_z} = \frac{2 \cdot 30 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m}}{542 \text{ cm}^3} = 36.9 \text{ MPa}$$



6°) La ménsula de la figura es de sección cuadrada de lado  $a$ . Hallar la longitud  $\ell$  para la cual la tensión tangencial máxima provocada por  $F$  iguala a la tensión normal máxima

(3 puntos)



Esfuerzos en la sección del empotramiento

$$\tau_{mx} = \frac{T_{mx} \cdot M_{zmx}}{I_z \cdot a}$$

$$T_{mx} = F$$

$$M_{zmx} = M_z(y=0) = a \frac{a}{2} \frac{a}{4} = \frac{a^3}{8}$$

$$\tau_{mx} = \frac{M_{Tmx}}{I_z} y_{mx}$$

$$I_z = \frac{1}{12} a a^3 = \frac{a^4}{12}$$

$$y_{mx} = \frac{a}{2}$$

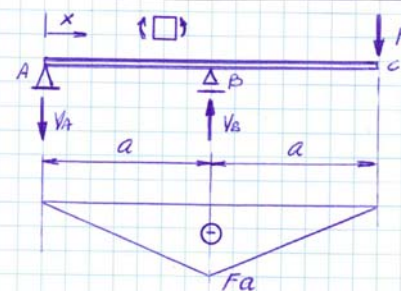
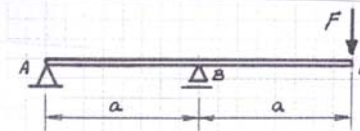
$$M_{Tmx} = F\ell$$

Sustituyendo e igualando:

$$\ell = \frac{a}{4}$$

7°) Para la viga de la figura, obtener en función de  $F$  y  $a$  la expresión del potencial interno. Hallar a partir de la misma la expresión del desplazamiento vertical producido en el extremo libre C

(3 puntos)



Equilibrio:  $V_A - V_B + F = 0$   
 $(M_A=0) F \cdot 2a = V_B \cdot a$

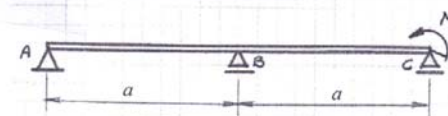
$$M(x) = \begin{cases} -Fx, & 0 \leq x \leq a \\ -F(2a-x), & a \leq x \leq 2a \end{cases}$$

$$W = \int \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^a F^2 x^2 dx + \int_a^{2a} F^2 (2a-x)^2 dx \right]$$

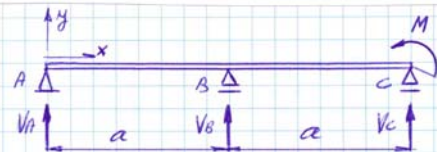
Teorema de Castigliano:  $\delta_C = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{2EI} \left[ 2 \int_0^a F x^2 dx + 2 \int_a^{2a} F (2a-x)^2 dx \right] = \frac{2Fa^3}{3EI}$

8°) La viga de la figura es de rigidez constante de módulo  $EI$ . Plantee la ecuación universal, obtenga el desplazamiento vertical de las secciones centrales de los dos vanos y dibuje a estima la elástica.

Datos:  $E, I, M$  y  $a$ . (5 puntos)







$$V_A + V_B + V_C = 0$$

$$V_A 2a + V_B a = M$$

Ecuación universal:  $EI y = EI y_0 + EI \theta_0 x + \frac{V_A}{6} x^3 + \frac{V_B}{6} (x-a)^3$

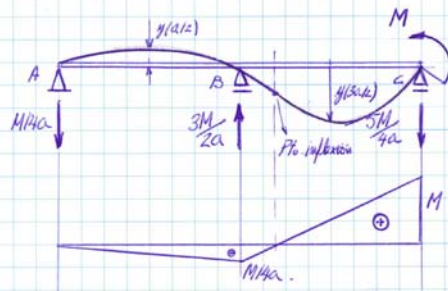
Condiciones de contorno:  $y(0) = y_0 = 0$

$$EI y(a) = EI \theta_0 a + \frac{V_A}{6} a^3 = 0$$

$$EI y(2a) = EI \theta_0 2a + \frac{V_A}{6} (2a)^3 + \frac{V_B}{6} (2a-a)^3 = 0$$

De las ecuaciones de equilibrio y de las condiciones de contorno se obtiene:

$$\theta_0 = -\frac{V_A a^3}{6EI} = \frac{Ma^2}{24EI}; \quad V_A = -\frac{M}{4a}; \quad V_B = \frac{3M}{2a}; \quad V_C = -\frac{5M}{4a}$$

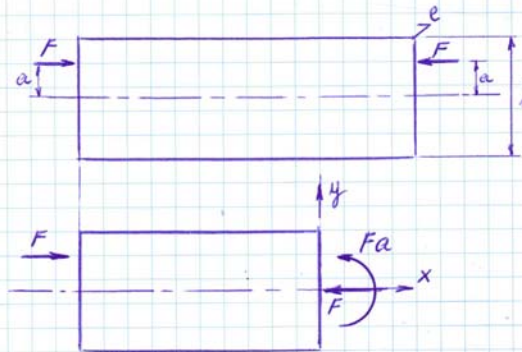


$$EI y\left(\frac{a}{2}\right) = EI \theta_0 \frac{a}{2} - \frac{M/4a}{6} \left(\frac{a}{2}\right)^3$$

$$EI y\left(\frac{3a}{2}\right) = EI \theta_0 \frac{3a}{2} - \frac{M/4a}{6} \left(\frac{3a}{2}\right)^3 + \frac{3M/2a}{6} \left(\frac{a}{2}\right)^3$$

$$y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{Ma^2}{64EI}; \quad y\left(\frac{3a}{2}\right) = -\frac{3Ma^2}{64EI}$$

9º) Una barra de sección rectangular  $h \times e$  está sometida a una compresión excéntrica, tal como se indica en la figura. Hallar la condición que debe cumplir la excentricidad  $a$  para que en el borde inferior de la barra la tensión normal sea nula. (3 puntos)



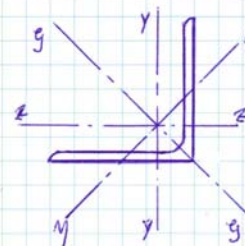
Flexión compuesta:

$$\sigma(y) = -\frac{M}{Z} = -\frac{F}{A \cdot e} + \frac{Fa}{eh^3/12} \frac{h}{2} = 0$$

de donde:  $a = \frac{h}{6}$

10º) Determinar el plano de pandeo y la carga crítica de Euler en un soporte biempotrado constituido por un perfil angular L 40-6. Determinar las longitudes máxima y mínima entre las cuales el soporte cumple la normativa y es válida la aplicación de la fórmula de Euler.

(4 puntos)



$$I_{min} = I_y = 2,65 \text{ cm}^4 \rightarrow \text{Plano de pandeo: } x\bar{y}$$

$$l = \frac{l_p}{i_y} = \frac{l/2}{i_y} \rightarrow l = 2 i_y d = 2 \cdot 0,77 \text{ cm} \cdot d$$

$$\text{Normativa: } l_{max} = 250 \rightarrow l_{max} = 2 \cdot 0,77 \text{ cm} \cdot l_{max} = 385 \text{ cm}$$

$$\lambda_{min} = \lambda_e = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = \pi \sqrt{\frac{200000 \text{ MPa}}{200 \text{ MPa}}} = 99,34$$

$$\text{luego: } l_{min} = 2 \cdot 0,77 \text{ cm} \cdot \lambda_{min} = 153 \text{ cm}$$